PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE BALEARES

JUNIO - 2002

RESUELTOS

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar de manera clara y razonada a una de las dos opciones propuestas que a continuación se proponen.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

OPCIÓN A

1º) Se considera la función $f(x) = -x\,L\,x$. Se pide:

a) Calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$.

b) Demostrar que f(x) presenta un máximo relativo para $x = \frac{1}{e}$.

c) Hacer una gráfica de esta función.

----

a)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (-x\,L\,x) = -0 \cdot (-\infty) \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow L'Hopital \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} x = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x\,L\,x) = -\infty \cdot (-\infty) = \infty^2 = \underline{\underline{\infty}}$$

b)

$$f'(x) = -1 \cdot L\,x - x \cdot \frac{1}{x} = -L\,x - 1 \;;;\; f'(x) = 0 \Rightarrow -Lx - 1 = 0 \;;;\; Lx = -1 \;;;\; \underline{x = \frac{1}{e}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''\left(\tfrac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximo relativo para } x = \frac{1}{e},\ c.q.d.}}$$

c)

Para hacer una gráfica de f(x), además de los datos facilitados por los apartados anteriores conviene tener en cuenta lo siguiente.

La función está definida solamente para valores de x mayores que cero. (Los números negativos no tienen logaritmo y el logaritmo de cero es menos infinito, que no es real).

Se anula para x = 1, por lo tanto pasa por el punto A(1, 0).

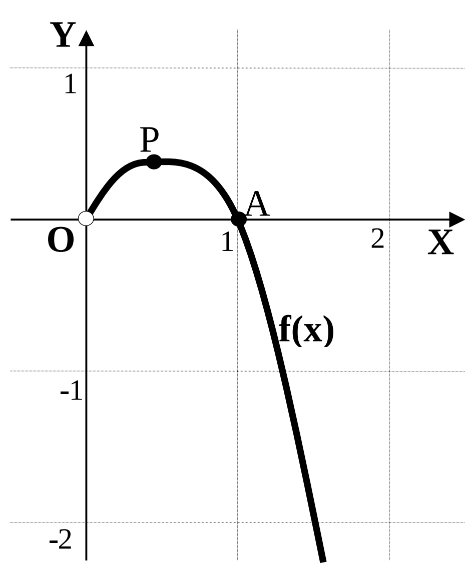
El máximo relativo es el siguiente punto:

$$f'\left(\tfrac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} \cdot L\frac{1}{e} = -\frac{1}{e} \cdot (L1 - Le) = -\frac{1}{e} \cdot (0-1) = \frac{1}{e} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{e},\ \frac{1}{e}\right)}$$

$f''(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow f''(x) \neq 0,\ \forall x \in R$ y también $f''(x) < 0,\ \forall x \in R$, lo cual significa que la función no tiene puntos de inflexión; que es creciente en el intervalo $\left(0,\ \frac{1}{e}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1}{e},\ +\infty\right)$ y que es cóncava $(\cap)$ en su dominio.

De los límites de los apartados anteriores se deduce que no tiene asíntotas.

Con los razonamientos y datos anteriores podemos esbozar con bastante exactitud la gráfica de la función, que es la que sigue.



****

2º) Se considera el conjunto M de las matrices 3x3 tales que en cada fila y en cada columna tienen dos ceros y un 1. Se pide:

a) Escribir todas las matrices del conjunto M.

b) Ver que todas estas matrices tienen inversa.

----

a)

Por seguir un orden he partido de la matriz I y he mantenido el primer uno en el elemento a_{11} y he completado los dos casos posibles; después he repetido en proceso con los elementos a_{12} y a_{13}.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \;;;\; M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$|M_1| = 1 \;;;\; |M_2| = -1 \;;;\; |M_3| = -1 \;;;\; |M_4| = 1 \;;;\; |M_5| = 1 \;;;\; |M_6| = -1$$

En efecto, todas las matrices tienen su determinante distinto de cero, por lo tanto, todas son inversibles, como teníamos que ver.

****

3º) Enunciar el Teorema de Bolzano. ¿Puede aplicarse este teorema a la función trigonométrica $f(x)=sen(2x)+\cos(3x)$ si el intervalo es $[0,\ \pi]$? Encontrar, si existe, un punto de $[0,\ \pi]$ en el cual se anule esta función.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c\in(a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, por tanto lo será en cualquier intervalo finito que se considere.

Se trata de encontrar dos valores reales $a,\ b\in(0,\ \pi)$, tales que: f(a) < 0 y f(b) > 0:

Por ejemplo:

$$\underline{x=\frac{\pi}{3}} \Rightarrow f\left(\tfrac{\pi}{3}\right)=sen\ \frac{2\pi}{3}+\cos\ \pi=sen\ 120^{o}+\cos\ 180^{o}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}-2}{2}<0$$

$$\underline{x=\frac{\pi}{4}} \Rightarrow f\left(\tfrac{\pi}{4}\right)=sen\ \frac{\pi}{2}+\cos\ \frac{3\pi}{4}=sen\ 90^{o}+\cos\ 135^{o}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}>0$$

Según el teorema de Bolzano, se puede afirmar que la función f(x) tiene al menos un punto de corte con el eje OX en el intervalo $(0,\ \pi)$.

Vamos a determinar, al menos un punto:

$$f(x)=sen(2x)+\cos(3x)=0\ ;;\ sen(2x)+\cos(2x+x)=0\ ;;$$

$$2\,sen\ x\cdot\cos\ x+\cos(2x)\cdot\cos\ x-sen(2x)\cdot sen\ x=0\ ;;$$

$$2\,sen\ x\cdot\cos\ x+\cos(2x)\cdot\cos\ x-2\,sen\ x\cdot\cos\ x\cdot sen\ x=0\ ;;$$

$$\cos\ x\cdot\left[2\,sen\ x+\cos(2x)-2\,sen^{2}\ x\right]=0 \Rightarrow \cos\ x=0\ ;;\ \underline{\underline{x=\frac{\pi}{2}}}$$

Otras soluciones se obtienen de la ecuación: $2\,sen\ x+\cos(2x)-2\,sen^{2}x=0$

$$2\,sen\ x+\cos^{2}\ x-sen^{2}x-2\,sen^{2}x=0\ ;;\ 2\,sen\ x+1-sen^{2}\ x-3\,sen^{2}x=0\ ;;$$

$$4\,sen^{2}x-2\,sen\ x-1=0\ ;;\ sen\ x=\frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{2\pm2\sqrt{5}}{8}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\Rightarrow \cdots\cdots$$

****

4º) Decir para que valor de k el sistema $\begin{cases} kz+kt=1 \\ kx+z=0 \\ ky+t=0 \end{cases}$ es compatible. Resolverlo en el caso de k = 1.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k & 1 \\ k & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se trata de un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas, el sistema será compatible cuando ambas matrices tengan por rango tres o dos, que es el mínimo que pueden tener, ya que existe el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Veamos el rango de M en función de k:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1,\ C_2,\ C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ k & 0 & 1 \\ 0 & k & 0 \end{vmatrix} = k^3 = 0 \;;;\; \underline{k=0} \\ \\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & k \\ k & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = k^3 = 0 \;;;\; \underline{k=0} \\ \\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & k & k \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 = 0 \;;;\; \underline{k=0} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{k=0 \Rightarrow Rango\ \ M=2} \\ \\ \underline{k \neq 0 \Rightarrow Rango\ \ M=3} \end{array} \right\}$$

Veamos el rango de M' para k = 0, donde las dos primeras columnas tienen todos sus elementos cero, por lo tanto:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_3,\ C_4,\ C_5\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ k=0 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

Para k = 1 resulta un sistema con mayor número de incógnitas que de ecuaciones, por lo cual es compatible indeterminado.

El sistema resultante es $\begin{cases} z+t=1 \\ x+z=0 \\ y+t=0 \end{cases}$.

Considerando una de las incógnitas como parámetro, por ejemplo t, resulta:

$$\begin{cases} z=1-t \\ x=-z=-(1-t)=-1+t \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=-1+t \\ y=-t \\ z=1-t \end{cases}}}$$

****

OPCIÓN B

1º) Encontrar todas las matrices reales 2x2 tales que la suma de los elementos de cada fila sea igual a 1 y la suma de los elementos de la primera columna sea igual a cero.

$$M = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ -a & 1+a \end{pmatrix}, \ \forall a \in R$$

****

2º) Hacer un dibujo de la región limitada por la función $y = x^3(x+2)$ y la recta y = 0. Calcular el área de esta región.

Se trata de una función polinómica, por lo cual es continua en su dominio, que es R. Para su dibujo vamos a determinar los máximos y mínimos, puntos de inflexión y cortes con los ejes.

Los puntos de corte de la curva con el eje de abscisas son para x = 0 y x = -2.

$$y = x^3(x+2) = x^4 + 2x^3 \;\;;;\;\; y' = 4x^3 + 6x^2 = \underline{2x^2(2x+3) = y'}$$

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2(2x+3) = 0 \;\;;;\;\; \underline{x_1 = 0} \;\;;;\;\; \underline{x_2 = -\frac{3}{2}}$$

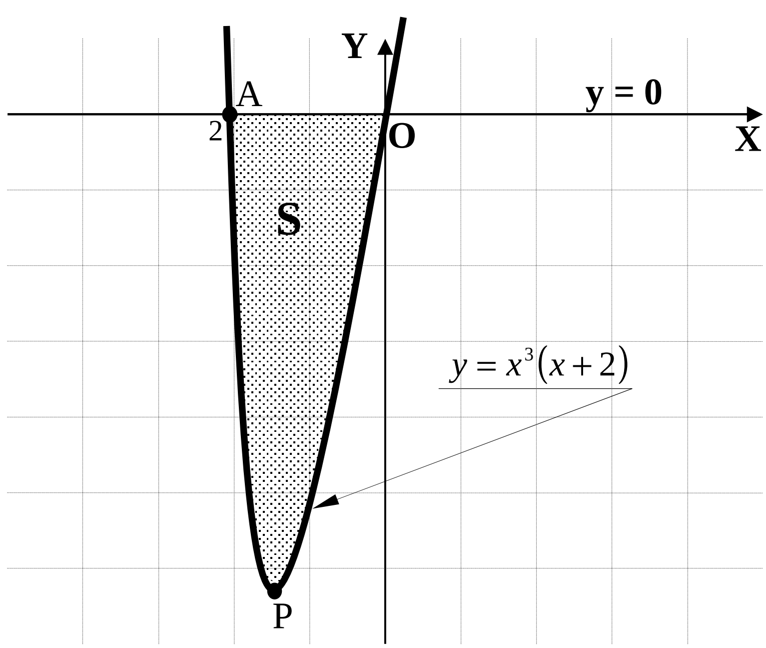
$$y'' = 12x^2 + 12x = \underline{12x(x+1) = y''}$$

$$y''(0) = 0 \;\rightarrow\; Para \;\; punto \;\; de \;\; inflexión. \;\;\; y''' = 24x + 12 \;\;;;\;\; y'''(0) = 12 \neq 0 \Rightarrow \underline{P.I. \Rightarrow O(0,\; 0)}$$

$$y''\left(-\tfrac{3}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{3}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}+1\right) = -8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \;\Rightarrow\; Máximo \;\; relativo \;\; para \;\; x = -\frac{3}{2}.$$

$$y = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \left(-\frac{3}{2}+2\right) = -\frac{27}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{27}{4} \;\;\Rightarrow\;\; Máx. \;\Rightarrow\; \underline{A\left(-\frac{3}{2},\; -\frac{27}{4}\right)}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



Para $-2 < x < 0$ resulta que y < 0, por lo tanto el valor del área resultará negativa; para evitarlo, cambiamos los límites de integración.

$$S = \int_{0}^{-2} x^3 (x+2) \cdot dx = \int_{0}^{-2} (x^4 + 2x^3) \cdot dx = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2x^4}{4} \right]_0^{-2} = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} \right]_0^{-2} =$$

$$= \left[\frac{(-2)^5}{5} + \frac{(-2)^4}{2} \right] - 0 = -\frac{32}{5} + \frac{16}{2} = 8 - \frac{32}{5} = \frac{40-32}{5} = \underline{\underline{\frac{8}{5} u^2 = S}}$$

****

3º) Encontrar la ecuación de la recta tangente la función $f(x)=\frac{Lx}{x}$ en el punto de inflexión. Hacer una gráfica de la función en un entorno de este punto, donde aparezca también dibujada la recta tangente encontrada anteriormente.

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-Lx\cdot 1}{x^2}=\underline{\frac{1-Lx}{x^2}=f'(x)}$$

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-Lx)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-1-2(1-Lx)}{x^3}=\frac{-1-2+2Lx}{x^3}=\underline{\frac{2Lx-3}{x^3}=f''(x)}$$

$$f'''(x)=\frac{\frac{2}{x}\cdot x^3-(2Lx-3)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2-3(2Lx-3)}{x^4}=\frac{2-6Lx+9}{x^4}=\underline{\frac{11-6Lx}{x^4}=f'''(x)}$$

$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{1-Lx}{x^2}=0\ ;;\ 1-Lx=0\ ;;\ Lx=1\ ;;\ \underline{x=e}$$

$$f''(e)=\frac{2Le-3}{e^3}=\frac{2-3}{e^3}=\frac{-1}{e^3}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo relativo para } x=e}$$

$$f(e)=\frac{Le}{e}=\frac{1}{e}\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máx.}\ \Rightarrow\ A\left(e,\ \frac{1}{e}\right)}\ \approx\ \underline{A(2'72,\ 0'34)}$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{2Lx-3}{x^3}=0\ ;;\ 2Lx-3=0\ ;;\ Lx=\frac{3}{2}\ ;;\ x=e^{\frac{3}{2}}=\underline{e\sqrt{e}=x}$$

$$f'''(e\sqrt{e})=\frac{11-6\cdot\frac{3}{2}}{e^3}=\frac{11-9}{e^3}=\frac{2}{e^3}\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Punto de inflexión para } x=e\sqrt{e}}$$

$$f(e\sqrt{e})=\frac{L(e\sqrt{e})}{e\sqrt{e}}=\frac{\frac{3}{2}}{e\sqrt{e}}=\frac{3}{2e\sqrt{e}}=\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\ \Rightarrow\ \underline{P.I.\ \Rightarrow\ B\left(e\sqrt{e},\ \frac{3\sqrt{e}}{2e^2}\right)}\ \approx\ \underline{B(4'48,\ 0'33)}$$

La ecuación de la recta tangente tiene como pendiente el valor de la derivada en ese punto:

$$m=f'(e\sqrt{e})=\frac{1-L(e\sqrt{e})}{(e\sqrt{e})^2}=\frac{1-\frac{3}{2}}{e^3}=\frac{-\frac{1}{2}}{e^3}=\underline{\frac{-1}{2e^3}=m}$$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$, aplicada a este caso sería:

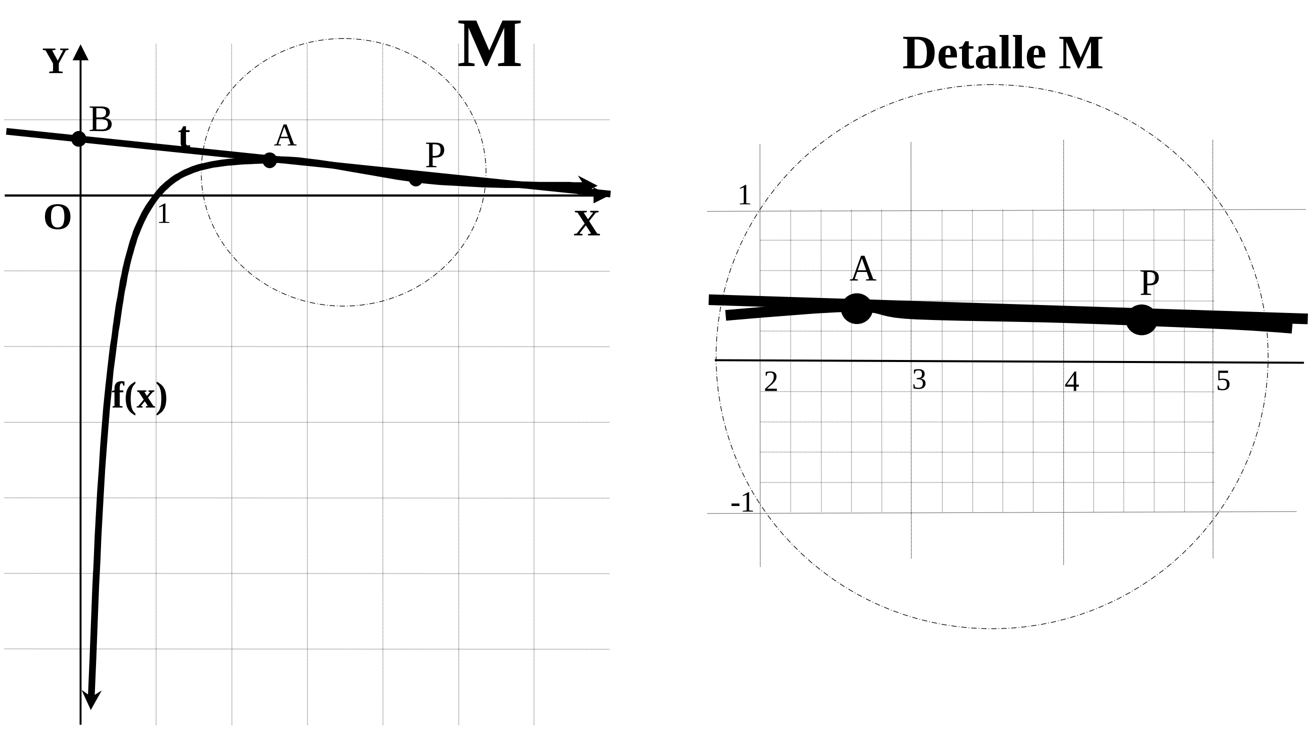
$$y-\frac{3\sqrt{e}}{2e^2}=\frac{-1}{2e^3}\left(x-e\sqrt{e}\right)\ ;;\ 2e^3y-3e\sqrt{e}=-x+e\sqrt{e}\ ;;\ \underline{\underline{t\equiv x+2e^3y-4e\sqrt{e}=0}}$$

Para facilitar la expresión de la tangente, la expresamos en forma explícita y determinamos dos puntos de la misma:

$$y=\frac{-1}{2e^3}x+\frac{4e\sqrt{e}}{2e^3}=\frac{-1}{2e^3}x+\frac{2\sqrt{e}}{e^2}\ ;;\ x=0\ \Rightarrow\ y=\frac{2\sqrt{e}}{e^2}\cong 0'74\ \Rightarrow\ \underline{B(0,\ 0'74)}$$

$$y=\frac{1}{4}\ \Rightarrow\ x=4e\sqrt{e}-\frac{e^3}{2}\cong 18-10=8\ \Rightarrow\ \underline{C\left(\frac{1}{4},\ 8\right)}$$

Teniendo en cuenta que el dominio de definición de la función es $(0,\ +\infty)$ y que tiene por asíntotas los ejes de coordenadas, la representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



****

4º) Encontrar la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos A(1, 0, 0), B(0, 2, 0) y C(0, 0, 3). Encontrar los puntos de la recta x = y = z que están a distancia $d=\frac{1}{7}$ de este plano.

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 2,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)=(-1,\ 2,\ 0)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 0,\ 3)-(1,\ 0,\ 0)=(-1,\ 0,\ 3)$$

E plano π viene determinado por los vectores $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$ y cualquiera de los tres puntos, por ejemplo, el A(1, 0, 0):

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}=0\ ;;\ 6(x-1)+2z+3y=0\ ;;\ 6x-6+2z+3y=0$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv 6x+3y+2z-6=0}}$$

Los puntos de la recta r tienen por expresión general P(x, x, x).

La distancia de un punto a una recta es $d(P,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicando esta fórmula al plano π y al punto P, resulta:

$$d(P,\ \pi)=\frac{1}{7}=\frac{|6x+3x+2x-6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{|11x-6|}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{|11x-6|}{\sqrt{49}}=\frac{|11x-6|}{7}\ \Rightarrow\ |11x-6|=1$$

$$\left.\begin{array}{l}11x-6=1\\ 11x-6=-1\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}11x=7\\ 11x=5\end{array}\right\}\quad\begin{array}{l}\rightarrow\ x_1=\frac{7}{11}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{A\left(\frac{7}{11},\ \frac{7}{11},\ \frac{7}{11}\right)}}\\ \rightarrow\ x_2=\frac{5}{11}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{B\left(\frac{5}{11},\ \frac{5}{11},\ \frac{5}{11}\right)}}\end{array}$$

****